Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет имени С.М. Кирова»

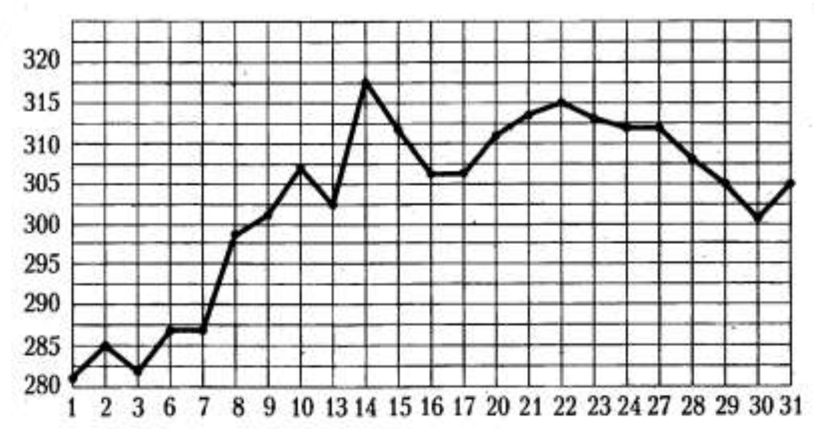
МАТЕМАТИКА

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ (ПРИМЕР)

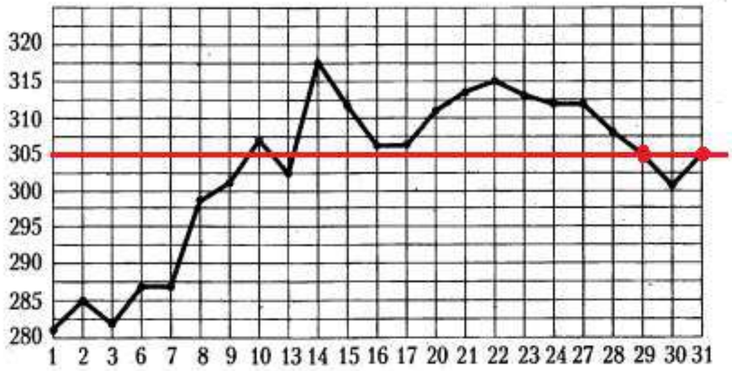
1. Текстовая задача на действия.
Стоимость покупки с учетом 3-процентной скидки по дисконтной карте составила 1746 рублей. Сколько рублей пришлось бы заплатить за покупку при отсутствии дисконтной карты?
Решение. На 97% приходится 1746 руб. Тогда на 100 % (цена покупки при отсутствии дисконтной карты) приходится 1746/97*100=1800 руб.

О т в е т : ___1800_______ .

2. Чтение графиков и диаграмм
На рисунке жирными точками показана цена палладия, установленная Центробанком РФ, во все рабочие дни в октябре 2019 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена палладия в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней за указанный период цена палладия была ровно 305 рублей за грамм.



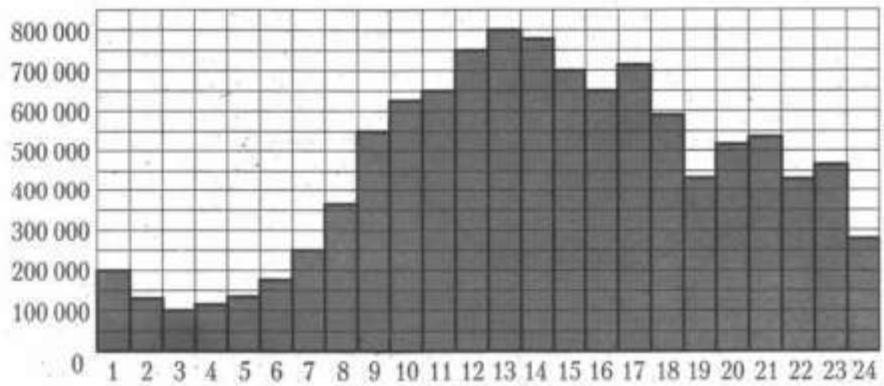
Решение. Цена 305 руб. соответствует прямой *У*=305. Проводим прямую *У*=305 и ищем ТОЧКИ, (дни), лежащие на прямой. На прямую попало 2 ТОЧКИ.



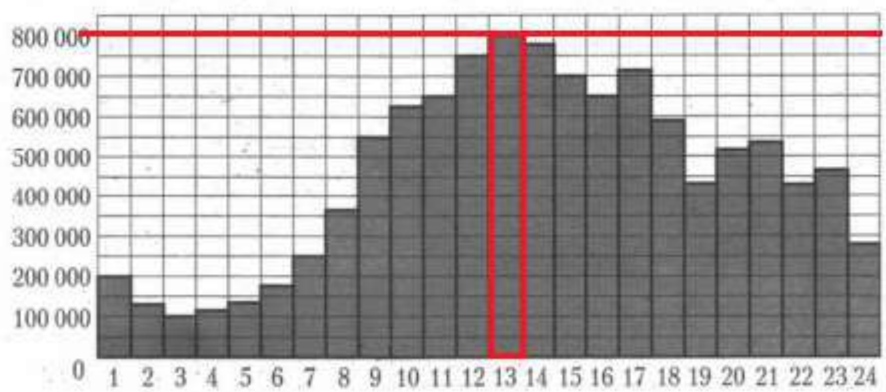
О т в е т : ___2_______ .

ИЛИ

На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости в течение каждого часа 8 декабря 2021 года. По горизонтали указываются номер часа, по вертикали – количество посетителей сайта за данный час. Определите по диаграмме за какой час в данный день на сайте РИА Новости побывало максимальное количество посетителей.



Решение. Наибольшему количеству посетителей соответствует столбец наибольшей высоты.

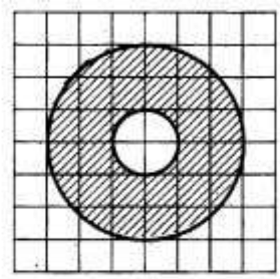


Это столбец соответствует 13 часам.

О т в е т : ____13______ .

3. Планиметрическая задача с картинкой.

На клетчатой бумаге нарисованы два круга. Площадь внутреннего круга равна 33? Найдите площадь заштрихованной фигуры.

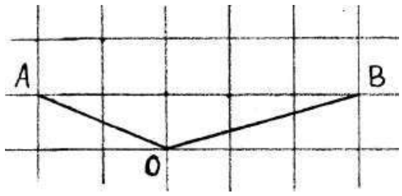


Решение. Радиус внешнего круга в три раза больше радиуса внутреннего круга. Следовательно, его площадь в девять раз больше и равна 33*9. Площадь заштрихованной фигуры равна разности площадей большего и меньшего кругов: 33*9-33=33*8=264.

О т в е т : ____264______ .

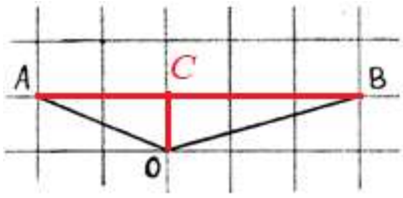
ИЛИ

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 х 1 изображен угол AOB . Найдите тангенс этого угла.



Решение.

$$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB;$$



$$tg\angle AOC = \frac{AC}{OC} = \frac{2}{1} = 2;$$

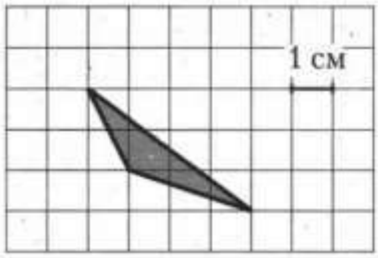
$$tg\angle COB = \frac{CB}{OC} = \frac{3}{1} = 3.$$

$$tg(\angle AOB) = tg(\angle AOC + \angle COB) = \frac{tg(\angle AOC) + tg(\angle COB)}{1 - tg(\angle AOC) \bullet tg(\angle COB)} = \frac{2+3}{1-5} = 1{,}25 .$$

О т в е т : _____1,25_____ .

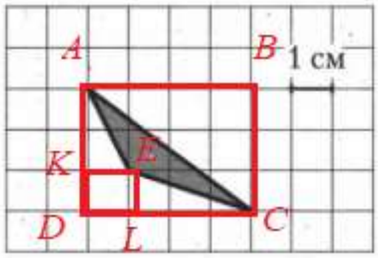
ИЛИ

Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



О т в е т : __________ .

Решение.



$$S_{ACE} = S_{ABCD} - S_{ACB} - S_{KELD} - S_{AEK} - S_{CEL} =$$

$$= 3 \bullet 4 - \frac{1}{2} \bullet 3 \bullet 4 - 1 \bullet 1 - \frac{1}{2} \bullet 2 \bullet 1 - \frac{1}{2} \bullet 3 \bullet 1 = 12 - 6 - 1 - 1 - 1{,}5 = 2{,}5 .$$

О т в е т : ____ 2,5 ______ .

4. Задача по теории вероятностей

На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение. «На экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем» означает, что достанется вопрос на тему «Вписанная окружность» ИЛИ вопрос на тему «Параллелограмм». То есть, событие . «На экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем» есть сумма событий «достанется вопрос на тему «Вписанная окружность»» и «достанется вопрос на тему «Параллелограмм»». Поскольку события несовместны (вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет), то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей 0,2+0,15=0,35.

О т в е т : ____ 0,35 ______ .

5. Решение простых иррациональных, показательных, логарифмических, тригонометрических уравнений

5.1. Решите уравнение $\sqrt[3]{3x-17} = -2$.

Решение.

$$\sqrt[3]{3x-17}=-2 \quad \to \quad 3x-17=(-2)^3 \quad \to \quad 3x=-8+17 \quad \to \quad x=3.$$

О т в е т : ____ 3 ______ .

ИЛИ

5.2. Решите уравнение $\sqrt{4x^2-27}=-x$. Если уравнение имеет несколько корней, то в ответе укажите их произведение

Решение. Ограничения: $-x \ge 0 \quad \to \quad x \le 0$

$$\sqrt{4x^2-27}=-x \quad \to \quad 4x^2-27=(-x)^2 \quad \to \quad 3x^2=27 \quad \to \quad x^2=9 \quad \to \quad x=\pm 3$$

$x=3$ не удовлетворяет ограничению.

О т в е т : _____ -3 _____ .

ИЛИ

5.3. Решите уравнение $2^{\frac{x-20}{4}}=\frac{1}{16}$.

Решение.

$$2^{\frac{x-20}{4}}=\frac{1}{16} \quad \to \quad 2^{\frac{x-20}{4}}=2^{-4} \quad \to \quad \frac{x-20}{4}=-4 \quad \to$$

$$\to \quad x-20=-16 \quad \to \quad x=4.$$

О т в е т : _____ 4 _____ .

ИЛИ

5.3. Решите уравнение $\log_2(3x-1)=1+\log_2(4x+5)$. В ответе укажите количество его корней.

Решение. Ограничения: $\begin{cases} 3x-1>0; \\ 4x+5>0. \end{cases}$

$$\log_2(3x-1)=1+\log_2(4x+5) \quad \to \quad \log_2(3x-1)=\log_2 2+\log_2(4x+5) \quad \to$$

$$\to \quad \log_2(3x-1)=\log_2 2+\log_2(4x+5) \quad \to \quad \log_2(3x-1)=\log_2 2(4x+5) \quad \to$$

$$\to \quad 3x-1=8x+10 \quad \to \quad -5x=11 \quad \to \quad x=-2{,}2.$$

$x=-2{,}2$ не удовлетворяет ограничениям, следовательно, решений нет. Количество корней равно 0.

О т в е т : ___ 0 _______ .

ИЛИ

5.4. Решите уравнение $\sin\frac{\pi(x-2)}{4}=-1$. В ответе запишите корень из отрезка [3;10].

Решение.

$$\sin\frac{\pi(x-2)}{4}=-1 \quad\rightarrow\quad \frac{\pi(x-2)}{4}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z, \quad\rightarrow\quad x-2=-2+8n \quad, n\in Z,$$

$x=8n \quad, n\in Z.$

Найдем значения n, при которых корни уравнения принадлежат отрезку [3;10]:

$$3\le 8n\le 10 \quad, n\in Z, \quad\rightarrow\quad \frac{3}{8}\le n\le\frac{10}{8} \quad, n\in Z, \quad\rightarrow\quad n=1.$$

Если $n=1$, то $x=8$.

О т в е т : ____ 8 ______ .

6. Задача по планиметрии

6.1. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, $\sin A=0{,}48$. Найдите $\cos B$.

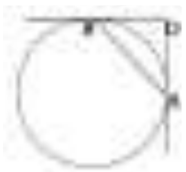
Решение. Поскольку в прямоугольном треугольнике сумма острых углов равна 90º, то

$$\angle B=90^{\circ}-\angle A \quad\rightarrow\quad \cos B=\cos(90^{\circ}-A)=\sin A=0{,}48\,.$$

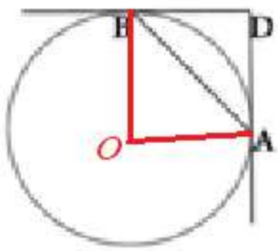
О т в е т : ___ 0,48_______ .

ИЛИ

6.2. Касательные к окружности проведены через точки *A* и *B* .Дуга окружности *AB* , заключенная в угле *ADB* ,составляет 82⁰ . Найдите угол *BAD* . Ответ дайте в угловых градусах.



Решение.



1 способ.

$$\breve{AB}=82^{\circ} \quad\rightarrow\quad \angle AOB=82^{\circ}\,.$$
$$OB\perp BD \quad\rightarrow\quad \angle OBD=90^{\circ};\quad OA\perp AD \quad\rightarrow\quad \angle OAD=90^{\circ}\,.$$
$$\angle ADB=360^{\circ}-\angle OAD-\angle OBD-\angle BOA=98^{\circ}\,.$$

Поскольку треугольник *BDA* равнобедренный, то

$$\angle BAD=\frac{180^{\circ}-\angle ADB}{2}=\frac{82^{\circ}}{2}=41^{\circ}\,.$$

2 способ.

$$\breve{AB}=82^{\circ} \quad\rightarrow\quad \angle AOB=82^{\circ}\,.$$

Поскольку треугольник BOA равнобедренный, то

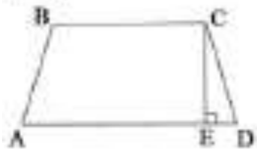
$$\angle OAB = \frac{180° - \angle AOB}{2} = \frac{98°}{2} = 49°.$$

$$OA \perp AD \;\; \to \;\; \angle BAD = 90° - \angle OAB = 90° - 49° = 41°.$$

О т в е т : ____ 41 ______ .

ИЛИ

6.3. Средняя линия равнобедренной трапеции равна 20. Высота трапеции равна 9. Тангенс острого угла равен 1,2. Найдите большее основание.



Решение.

Пусть $BC = x$, тогда $AD = x + 2ED$. Средняя лини трапеции равна полусумме ее оснований, т.е.

$$\frac{AD + BC}{2} = 20 \;\; \to \;\; 2x + 2ED = 40 \;\; \to \;\; x = 20 - ED.$$

Из прямоугольного треугольника CED:

$$ED = \frac{CE}{ctg(CDE)} = \frac{9}{1{,}2} = 7{,}5.$$

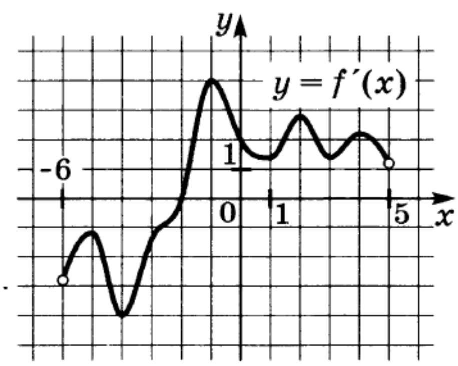
Тогда

$$x = 20 - 7{,}5 = 12{,}5 \;\; \to \;\; AD = 12{,}5 + 2 \bullet 7{,}5 = 27{,}5.$$

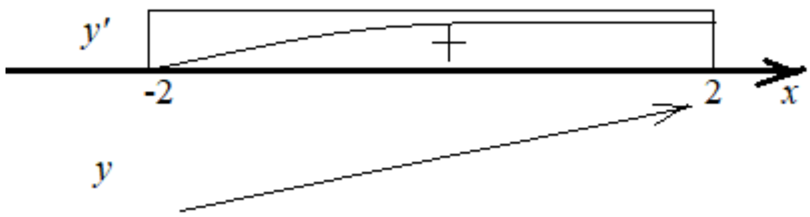
О т в е т : ___ 27,5 _______ .

7. Задача на исследование функции с помощью производной с использованием графиков.

7.1. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ – производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6;5)$. В какой точке отрезка $[-2;2]$ функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.

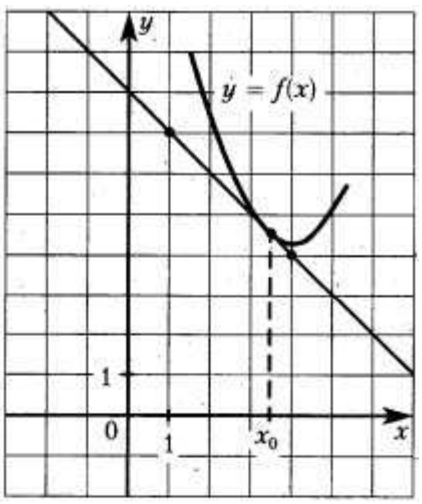


Решение. Изобразим схематично поведение функции на отрезке [-2; 2]:

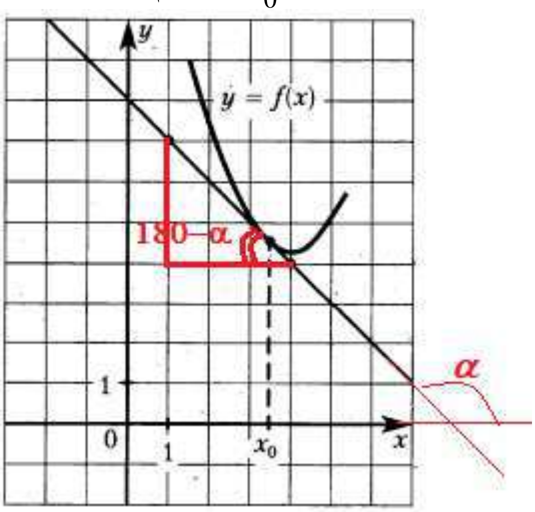


x= -2 – точка экстремума (минимума) на промежутке (-2;2] производная положительна, функция возрастает. Следовательно, наибольшее значение функции достигается в точке x=2.
Ответ: ____ 2 ______ .

ИЛИ
7.2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0..



Решение.
Значение производной функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 .

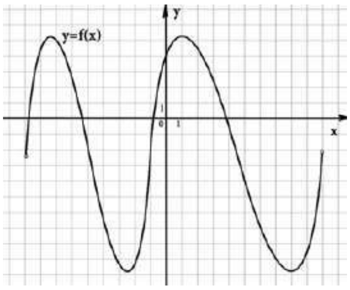


$$f'(x_0) = tg\alpha = -tg(180^\circ - \alpha) = -\frac{3}{3} = -1.$$

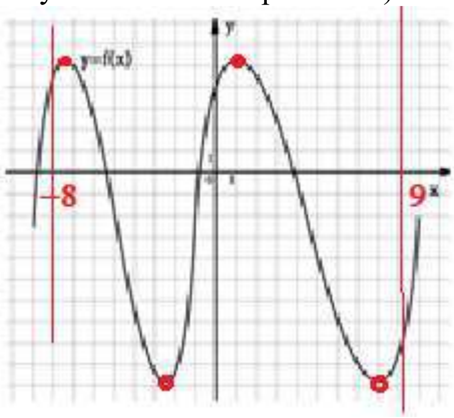
О т в е т : ___ **-1** _______ **.**

ИЛИ

7.3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$на интервале $(-9;\ 10)$.. Определите количество точек экстремума на интервале $(-8;\ 9)$.



Решение. В точках экстремума меняется направление монотонности функции (с возрастания на убывание или с убывания на возрастание).



По рисунку считаем 4 точки экстремума.

О т в е т : ____ **4** ______ **.**

8. Задача по стереометрии

8.1. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ $AB = 6$, а площадь боковой поверхности призмы равна 108. Найдите длину ребра BB_1.

Решение. Боковая поверхность правильной шестиугольной призмы состоит из шести прямоугольников, одна сторона которых равна стороне основания призмы, другая – боковому ребру. Тогда

$$S_{б.п.} = 6aH = 6 \bullet 6 \bullet BB_1\,.$$

Откуда

$$BB_1 = \frac{S_{б.п.}}{36} = \frac{108}{36} = 3.$$

О т в е т : ____ **3** ______ **.**

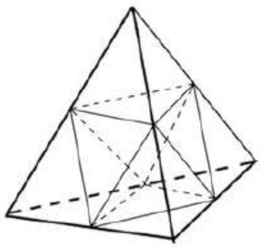
ИЛИ

8.2. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объем параллелепипеда равен 16. Найдите высоту цилиндра.
Решение. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту. В основании параллелепипеда лежит квадрат, сторона основания которого равна 8 (диаметр вписанного круга). Высота параллелепипеда равна высоте цилиндра. Тогда

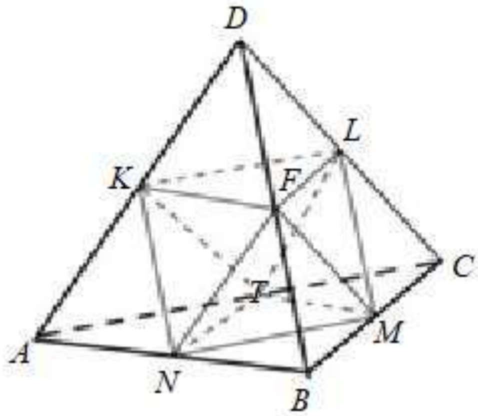
$$V = S_{кв} \bullet H \quad \to \quad H = \frac{V}{S_{кв}} = \frac{16}{8 \bullet 8} = \frac{1}{4} = 0{,}25 .$$

О т в е т : ____ 0,25 ______ .

ИЛИ
8.3. Объем тетраэдра равен 40,2. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины ребер данного тетраэдра.



Решение.



Каждое из ребер тетраэдров $DKFL$, $CLFM$, $BMFN$, $ANFK$ в два раза меньше (средняя линия) ребер исходного тетраэдра $DABC$. Следовательно,

$$V_{DKFL} = V_{CLFM} = V_{BVFN} = V_{ANFK} = \frac{1}{8} V_{DABC} = \frac{40{,}2}{8} = 5{,}025 .$$

$$V_{FKLMNT} = V_{DABC} - \left(V_{CLFM} + V_{BVFN} + V_{ANFK} + V_{DKFL}\right) = 40{,}2 - 4 \bullet 5{,}025 = 20{,}1 .$$

О т в е т : ____ 20,1 ______ .

9, 10, 11, 12. Преобразование алгебраических, степенных, логарифмических, тригонометрических выражений

9.1. Найдите значение выражения $\left(9\frac{4}{5} - 2{,}6\right) : \frac{2}{15}$.
Решение.

$$\left(9\frac{4}{5}-2{,}6\right):\frac{2}{15}=\left(\frac{9\cdot5+4}{5}-\frac{26}{10}\right)\cdot\frac{15}{2}=\left(\frac{49}{5}-\frac{13}{5}\right)\cdot\frac{15}{2}=\frac{36}{5}\cdot\frac{15}{2}=18\cdot3=54.$$

О т в е т : ____ 54 ______ .

ИЛИ

9.2. Найдите значение выражения $5^{3\sqrt{6}-2}\cdot5^{1-2\sqrt{6}}:5^{\sqrt{6}-3}$.

Решение. При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остается без изменения, а показатели степени складываются. При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается без изменения, а показатели степени вычитаются.

$$5^{3\sqrt{6}-2}\cdot5^{1-2\sqrt{6}}:5^{\sqrt{6}-3}=5^{3\sqrt{6}-2+1-2\sqrt{6}-(\sqrt{6}-3)}=5^{\sqrt{6}-1-\sqrt{6}+3}=5^2=25.$$

О т в е т : _____ 25 _____ .

ИЛИ

9.3. Найдите значение выражения $\dfrac{x^{-17}\cdot x^{-4}}{x^{-23}}$ при $x=7$.

Решение. При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остается без изменения, а показатели степени складываются. При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается без изменения, а показатели степени вычитаются.

$$\frac{x^{-17}\cdot x^{-4}}{x^{-23}}=x^{-17+(-4)-(-23)}=x^2;\qquad 7^2=49.$$

О т в е т : ____ 49 ______ .

ИЛИ

9.4. Найдите значение выражения $31-\sqrt[3]{3\sqrt{5}-5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{95+30\sqrt{10}}\cdot\sqrt[6]{625}$.

Решение.

$$31-\sqrt[3]{3\sqrt{5}-5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{95+30\sqrt{10}}\cdot\sqrt[6]{625}=$$

$$=31-\sqrt[3]{3\sqrt{5}-5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{\left(3\sqrt{5}+5\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt[6]{625}=$$

$$=31-\sqrt[3]{3\sqrt{5}-5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{3\sqrt{5}+5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{625}=31-\sqrt[3]{\left(3\sqrt{5}-5\sqrt{2}\right)\cdot\left(3\sqrt{5}+5\sqrt{2}\right)}\cdot\sqrt[6]{25^2}=$$

$$31-\sqrt[3]{\left(3\sqrt{5}\right)^2-\left(5\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{25}=31-\sqrt[3]{(45-50)\cdot25}=31-\sqrt[3]{-5^3}=31-(-5)=36.$$

О т в е т : ____ 36 ______ .

ИЛИ

9.5. Найдите значение выражения $\log_8 18+\log_8\dfrac{32}{9}$.

Решение.

$$\log_8 18+\log_8\frac{32}{9}=\log_8\left(18\cdot\frac{32}{9}\right)=\log_8 64=2.$$

О т в е т : ____ 2 ______ .

ИЛИ

9.6. Найдите значение выражения $\log_4 11\cdot\log_{11} 64$.

Решение. Поскольку

$$\log_a c\cdot\log_c b=\log_a b,$$

то

$$\log_4 11\cdot\log_{11} 64=\log_4 64=3.$$

О т в е т : _____ 3 _____ .

ИЛИ

9.7. Найдите значение выражения $81^{\log_3 4}$.

Решение. Поскольку

$$a^{\log_a b}=b$$

и

$$k\log_a b=\log_a b^k,$$

то

$$81^{\log_3 4}=\left(9^2\right)^{\log_3 4}=9^{2\log_3 4}=9^{\log_3 4^2}=4^2=16.$$

О т в е т : ____ 16 ______ .

ИЛИ

9.8. Найдите значение $tg\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$.

Решение.

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5},\quad\to\quad\sin\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)\quad\to\quad\sin\alpha<0\quad\to\quad\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{2}{\sqrt{5}}:\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{1}=-2.$$

О т в е т : ______ -2 ____ .

ИЛИ

9.9. Найдите значение $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-4\cos(\pi-\alpha)$, если $\cos\alpha=-0{,}4$.

Решение. Используем формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-4\cos(\pi-\alpha)=\cos\alpha-4(-\cos\alpha)=\cos\alpha+4\cos\alpha=5\cos\alpha=5\cdot(-0{,}4)=-2.$$

О т в е т : ______ -2 ____ .

ИЛИ

9.10. Найдите значение $1{,}25 \cdot \cos 2x$, если $\sin x = 0{,}4$.

Решение.

$$1{,}25 \cdot \cos 2x = 1{,}25\left(1 - 2\sin^2 x\right) = 1{,}25\left(1 - 2 \cdot 0{,}4^2\right) = 1{,}25(1 - 0{,}32) =$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{68}{100} = \frac{5 \cdot 17}{100} = 0{,}85.$$

О т в е т : _____ 0,85 _____ .

ИЛИ

9.11. Найдите значение $\cos 480^{\circ}$.

Решение. Используем формулы приведения:

$$\cos 480^{\circ} = \cos(450^{\circ} + 30^{\circ}) = -\sin 30^{\circ} = -0{,}5.$$

О т в е т : ____ -0,5 ______ .

ИЛИ

9.12. Найдите значение выражения $\dfrac{14\sin 57^{\circ}}{\cos 33^{\circ}}$.

Решение. Используем формулы приведения:

$$\frac{14\sin 57^{\circ}}{\cos 33^{\circ}} = \frac{14\sin(90^{\circ} - 33^{\circ})}{\cos 33^{\circ}} = \frac{14\cos 33^{\circ}}{\cos 33^{\circ}} = 14.$$

О т в е т : ____ 14 ______ .

ИЛИ

9.13. Найдите значение выражения $\dfrac{3\sin 134^{\circ}}{4\sin 67^{\circ}\cos 67^{\circ}}$.

Решение. Используем формулу синуса двойного угла:

$$\frac{3\sin\left(2 \cdot 67^{\circ}\right)}{4\sin 67^{\circ}\cos 67^{\circ}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot \sin 67^{\circ}\cos 67^{\circ}}{4\sin 67^{\circ}\cos 67^{\circ}} = 1{,}5$$

О т в е т : _____ 1,5 _____ .

13. Текстовая задача.

13.1. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время *t* падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h(t) = -5t^2$, где *h* — расстояние в метрах (от уровня земли), *t* — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

Решение. Уровень воды до дождя (в метрах) составлял

$$h(0{,}6) = -5 \cdot 0{,}6^2 = -5 \cdot 0{,}36 = -1{,}8.$$

После дождя уровень воды в колодце повышается, следовательно, время падения уменьшается, т.е. после дождя время падения t =0,4 с. Тогда расстояние до воды (в метрах) составит

$$h(0{,}4) = -5 \cdot 0{,}4^2 = -5 \cdot 0{,}16 = -0{,}8.$$

Таким образом, уровень воды повысился на 1 метр.

О т в е т : _____ 1 _____ .

ИЛИ

13.2. Для определения рейтинга R магазина бытовой техники был проведен опрос покупателей и группы экспертов. Число покупателей, оценивших магазин, равно 210, их средняя оценка равна 4,3, а оценка экспертов равна 3,7. Найдите величину рейтинга, если он вычисляется по формуле $R = r_{пок} - \dfrac{r_{пок} - r_{экс}}{(K+6)^m}$, где $m = \dfrac{0{,}01K}{r_{пок} + 2{,}0}$; $r_{пок}$ – средняя оценка магазина покупателями , $r_{экс}$ – оценка магазина, данная экспертами, K – число покупателей, оценивших магазин.

Решение. По условию: K=210; $r_{пок}$ =4,3; $r_{экс}$ =3,7. Подставим все данные в формулы:

$$m = \frac{0{,}01 \cdot 210}{4{,}3 + 2{,}0} = \frac{2{,}1}{6{,}3} = \frac{1}{3};$$

$$R = 4{,}3 - \frac{4{,}3 - 3{,}7}{(210+6)^{\frac{1}{3}}} = \frac{0{,}6}{\sqrt[3]{216}} = \frac{0{,}6}{6} = 0{,}1.$$

О т в е т : _____ 0,1 _____ .

14. Текстовая задача на составление уравнения.

Виноград содержит 90% влаги, а изюм — 5%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 20 килограммов изюма?.

Решение. В 20 кг изюма 95% сухого вещества, что равно 20*0,95=19 кг. В винограде 19 кг сухого вещества составляет 10%, т.е. 100% будет равно 19/10*100=190 кг.

О т в е т : ____ 190 ______ .

15. Точки экстремума, наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

15.1. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y = \sqrt{100 - x^2}$ на отрезке $\left[-6; 5\sqrt{3}\right]$.

Решение. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке достигаются либо на концах отрезка, либо в точках экстремума, попавших в отрезок. Найдем точки экстремума:

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}.$$

$$y'=0:\quad \frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}=0\quad\to\quad x=0.$$

Найдем значения функции на концах отрезка и в точке экстремума, попавшей в отрезок:

$$y(-6)=\sqrt{100-(-6)^2}=6;$$

$$y(5\sqrt{3})=\sqrt{100-(5\sqrt{3})^2}=5;$$

$$y(0)=\sqrt{100-0^2}=10;$$

$$y_{наиб}-y_{наим}=10-5=5.$$

О т в е т : _____ 5 _____ .

ИЛИ

15.2. Найдите точку минимума функции $y=2\cos\frac{\pi x}{3}+\frac{\pi x}{3}+2\pi$ на интервале (0; 8).

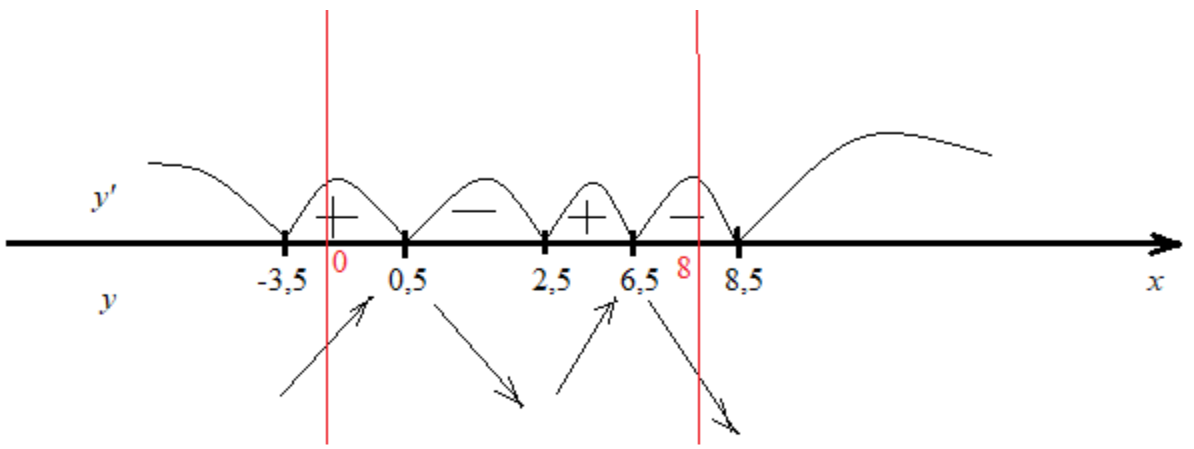
Решение. В точке минимума производная равна 0 или не определена и меняет знак при переходе через точку минимума с «-» на «+».

$$y'=\left(2\cos\frac{\pi x}{3}+\frac{\pi x}{3}+2\pi\right)'=-2\sin\frac{\pi x}{3}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}.$$

$$y'=0:\quad -\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi x}{3}+\frac{\pi}{3}=0;\quad \sin\frac{\pi x}{3}=\frac{1}{2};\quad \frac{\pi x}{3}=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$$

$$x=(-1)^n\frac{1}{2}+3n,\ n\in Z.$$

Запишем последовательность стационарных точек (от n=-1): -3,5; 0,5; 2,5; 6,5; 8,5 и т.д.
Выберем точки минимума:



На интервале (0; 8) одна точка минимума x=2,5.

О т в е т : _____ 2,5 _____ .

ИЛИ

15.3. Найдите наименьшее значение функции $y = |2x-3| + |2x-7|$ на отрезке $[1;\,9]$.

Решение. У первого модуля изменяется знак раскрытия с точке x=1,5, у второго модуля изменяется знак раскрытия с точке x=3,5. Раскроем модули, получим:

$$y = \begin{cases} -(2x-3)-(2x-7),\ x \in [1;1{,}5] \\ 2x-3-(2x-7),\ x \in (1{,}5;3{,}5] \\ 2x-3+2x-7,\ x \in (3{,}5;9] \end{cases} \qquad y = \begin{cases} -4x+10,\ x \in [1;1{,}5] \\ 4,\ x \in (1{,}5;3{,}5] \\ 4x-10,\ x \in (3{,}5;9] \end{cases}$$

До x=1,5 функция убывает, после x=3,5 функция возрастает на отрезке [1,5; 3,5] значение функции равно 4, следовательно, наименьшее значение функции равно 4.

О т в е т : ______ 4 ____ .

16. Геометрический смысл производной.

16.1. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = 4x^3 - 5x^2 + 8$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$ к оси ОХ.

Решение. Угловой коэффициент касательной равен значению производной функции в точке касания: $k = f'(x_0)$.

$$y' = 4 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x \quad \to \quad k = y'(-1) = 12 \cdot (-1)^2 - 10 \cdot (-1) = 12 + 10 = 22$$

О т в е т : ___ 22 _______ .

ИЛИ

16.2. Найдите абсциссу точки на графике функции $y = 3x^2 - 5x + 6$ обладающую тем свойством, что угловой коэффициент касательной, проведенный к графику функции в указанной точке, равен 13.

Решение. Угловой коэффициент касательной равен значению производной функции в точке касания: $k = f'(x_0)$.

$$y' = 6x - 5 \to y'(x_0) = 6x_0 - 5 = 13 \quad \to \quad x_0 = 3.$$

О т в е т : ____ 3 ______ .

17. Физический смысл производной.

17.1. За время t тело перемещается по прямой на расстояние $S(t) = 5 + 12t - e^{11-t}$. Какую скорость приобретет тело в момент времени $t = 11$?

Решение. Мгновенная скорость материальной точки есть производная от перемещения: $S'(t) = v(t)$.

$$S'(t) = 12 - e^{11-t} \cdot (-1)$$

$$v(t) = S'(t): \quad v(11) = S'(11) = 12 + e^{11-11} = 13.$$

О т в е т : ____ 13 ______ .

ИЛИ

17.2. За время t тело перемещается по прямой на расстояние $x(t) = 5 + 11t + t^2$.

(расстояние $x(t)$ измеряется в метрах, время t – в секундах). В какой момент времени скорость тела будет равна 25 м/с?

Решение. Мгновенная скорость материальной точки есть производная от перемещения:

$S'(t) = v(t)$.

$x'(t) = 11 + 2t$

$v(t) = x'(t)$: $v(t) = 11 + 2t = 25 \quad \to \quad t = 7.$

О т в е т : _____ 7 _____ .

18. Решение неравенства.

18.1. Решите неравенство $|7x + 4| \leq 17$. В ответе укажите количество его целых решений.

Решение.

$$|7x + 4| \leq 17 \quad \leftrightarrow \quad -17 \leq 7x + 4 \leq 17 \quad \leftrightarrow \quad -3 \leq x \leq \frac{13}{7},$$

$x \in \left[-3; \frac{13}{7}\right]$.

Целые решения: -3; -2; -1; 0; 1.

О т в е т : _____ 5 _____ .

ИЛИ

18.2. Решите неравенство $\frac{x}{2x+4} \geq 1$. В ответе укажите сумму целых решений неравенства.

Решение. Решаем методом интервалов.

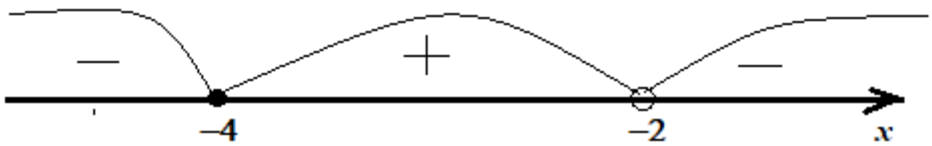
ОДЗ: $x \neq -2$.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x}{2x+4} - 1 \geq 0; \quad \frac{x - 2x - 4}{2x+4} \geq 0; \quad \frac{-x-4}{2x+4} \geq 0.$$

Нули левой части:

$-x - 4 = 0; \quad x = -4.$



Выбираем промежутки нужного знака (минус) и заштрихованные точки (нули):

$x \in [-4;-2)$.

Целые решения: -4; -3. Их сумма равна -4+(-3)= -7.

О т в е т : ____ -7 ______ .

19. Решение уравнения с помощью замены

19.1. Найдите корень уравнения $81^x - 9^{x+0,5} - 4 = 0$. Если корней несколько, то в ответе укажите сумму его корней. Если корень единственный, то в ответе укажите значение выражения 3^{x_0}, где x_0 – корень уравнения.

Решение.

$$81^x - 9^x \cdot 9^{0,5} - 4 = 0;$$

$$t = 9^x: \quad t^2 - 3t - 4 = 0; \quad t_1 = -1; t_2 = 4$$

$$9^x = -1 \quad \textit{нет решений};$$

$$9^x = 4 \quad x = \log_9 4.$$

Поскольку корень единственный, то находим значение

$$3^{x_0} = 3^{\log_9 4} = 3^{\log_3 2} = 2.$$

О т в е т : ____ 2 ______ .

ИЛИ

19.2. Решите уравнение $4\cos^2 x - 8\sin x + 1 = 0$. В ответе укажите количество его решений $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

$$4\cos^2 x - 8\sin x + 1 = 0 \quad \to \quad 4(1 - \sin^2 x) - 8\sin x + 1 = 0$$

$$t = \sin x: \quad 4(1 - t^2) - 8t + 1 = 0; \quad -4t^2 - 8t + 5 = 0; \quad D = 64 + 80 = 144; \quad t_1 = -2,5; t_2 = 0,5$$

$$\sin x = -2,5 \quad \textit{нет решений};$$

$$\sin x = 0,5 \qquad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

В промежуток попадают $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$ решения $x_1=-2\pi+\frac{\pi}{6}$.

О т в е т : _____ 1 _____ .

ИЛИ

19.3. Решите уравнение $\log_{0,2}^2 x+3\log_{0,2} x+2=0$. Если корней несколько, то в ответе укажите отношение большего корня к меньшему.

Решение. ОДЗ: $x>0$.

$t=\log_{0,2} x$: $t^2+3t+2=0$; $t_1=-2; t_2=-1$;

$\log_{0,2} x=-1$; $x=5$;

$\log_{0,2} x=-2$; $x=25$.

$$\frac{x_{больший}}{x_{меньший}}=\frac{25}{5}=5.$$

О т в е т : ____5______ .

20. Решение уравнения разложением на множители

20.1. Найдите корень уравнения $\log_2(8-x)\cdot\log_4(x-5)=3\log_4(x-5)$. Если корней несколько, то в ответе укажите сумму его корней.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}8-x>0\\ x-5>0\end{cases}\to\quad x\in(5;8)$

Упростим уравнение

$\log_2(8-x)\cdot\log_4(x-5)-3\log_4(x-5)=0$

$(\log_2(8-x)-3)\cdot\log_4(x-5)=0$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен 0, а остальные при этом определены:

$$\left[\begin{array}{l}\log_2(8-x)-3=0\\ \log_4(x-5)=0\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{l}\log_2(8-x)=\log_2 2^3\\ \log_4(x-5)=\log_4 4^0\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{l}8-x=8\\ x-5=1\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=6\end{array}\right.$$

$x=0\notin(5;8)$

О т в е т : ____6______ .

ИЛИ

20.2. Решите уравнение $7^{x+1}+3^{x+2}=21^x+63$. Если уравнение имеет несколько корней, то в ответе укажите значение их произведения.

Решение.

$$7^x \cdot 7^1 + 3^x \cdot 3^2 = 3^x \cdot 7^x + 63 \quad \Leftrightarrow \quad 7 \cdot 7^x + 9 \cdot 3^x - 3^x \cdot 7^x - 63 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(7 - 3^x\right) 7^x - 9 \cdot \left(7 - 3^x\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(7 - 3^x\right)\left(7^x - 9\right) = 0$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен 0, а остальные при этом определены:

$$\left[\begin{array}{l} 7 - 3^x = 0 \\ 7^x - 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 7 \\ 7^x = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \log_3 7 \\ x_2 = \log_7 9 \end{array}\right. \qquad x_1 \cdot x_2 = \log_3 7 \cdot \log_7 9 = \log_3 9 = 2$$

О т в е т : ____ **2** ______ **.**

ИЛИ

20.3. Решите уравнение $3\sin 2x - 4\cos x + 3\sin x - 2 = 0$. В ответе укажите количество его решений в промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

$$3 \cdot 2\sin x \cos x - 4\cos x + 3\sin x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad 2\cos x(3\sin x - 2) + 3\sin x - 2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad (2\cos x + 1)(3\sin x - 2) = 0.$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен 0, а остальные при этом определены:

$$\left[\begin{array}{l} 2\cos x + 1 = 0; \\ 3\sin x - 2 = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2}; \\ \sin x = \frac{2}{3}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z; \\ x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + \pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

Промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ принадлежат корни: $x_1 = \frac{2\pi}{3}; \quad x_2 = \frac{4\pi}{3}; \quad x_3 = -\arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + \pi.$

О т в е т : ____ **3** ______ **.**