Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет
имени С.М. Кирова»
ПРИЕМНАЯ КОМИССИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №1.

1. Решите уравнение $\sqrt{4x^2 - 27} = -x$.
Если уравнение имеет больше одного корня, то в ответе запишите больший корень.
Ответ в виде числа запишите в опросный лист.

Решение. Ограничение: $-x \geq 0$
Возведем обе части уравнения в квадрат и решим полученное уравнение:

$$4x^2 - 27 = x^2$$

$$3x^2 - 27 = 0; \quad x^2 = 9; \quad x_{1,2} = \pm 3$$

$x_1 = 3$ не удовлетворяет ограничению.

Ответ: -3.

2. Решите уравнение $12^x - 9 \cdot 4^x = 8 \cdot 3^x - 72$.
Если уравнение имеет больше одного корня, то в ответе запишите меньший корень.
Значение корня запишите в опросный лист.

Решение.

$3^x \cdot 4^x - 9 \cdot 4^x - 8 \cdot 3^x + 8 \cdot 9 = 0$

$4^x\left(3^x - 9\right) - 8\left(3^x - 9\right) = 0$

$\left(3^x - 9\right)\left(4^x - 8\right) = 0$

$3^x - 9 = 0 \quad \textit{или} \quad 4^x - 8 = 0$

$3^x = 9 \quad \textit{или} \quad 4^x = 8$

$x = 2 \quad \textit{или} \quad x = \frac{3}{2}$

Ответ: 1,5 .

3. Решите уравнение $\log_{0,2}^2 x + 3\log_{0,2} x + 2 = 0$.
Если уравнение имеет больше одного корня, то в ответе запишите произведение корней.

Ответ в виде числа запишите в опросный лист.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$

Замена $t = \log_{0,2}x$:

$$t^2 + 3t + 2 = 0$$

$$D = 9 - 4 \bullet 2 = 1$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2}; \quad t_1 = -1; \ t_2 = -2$$

$$\log_{0,2}x = -1; \qquad \log_{0,2}x = -2$$

$$\log_{0,2}x = \log_{0,2}0{,}2^{-1}; \qquad \log_{0,2}x = \log_{0,2}0{,}2^{-2}$$

$$x = \left(\frac{2}{10}\right)^{-1}; \qquad x = \left(\frac{2}{10}\right)^{-2}$$

$$x = 5 ОДЗ; \qquad x = 25 ОДЗ$$

Ответ: 125 .

4. Решите уравнение $3\sin^2 x + 7\cos x - 3 = 0$. Определите число корней уравнения в интервале $[0;4\pi]$.
Количество корней в виде натурального числа запишите в опросном листе.

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, получим

$$3\left(1 - \cos^2 x\right) + 7\cos x - 3 = 0$$

Замена $t = \cos x$:

$$3\left(1 - t^2\right) + 7t - 3 = 0$$

$$-3t^2 + 7t = 0; \ \ t(-3t + 7) = 0; t_1 = 0; t_2 = \frac{7}{3}.$$

Обратная подстановка:

1) $\cos x = 0; \ \ x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

2) $\cos x = \frac{7}{3}$ нет решений .

Перебор решений показывает, что в заданный интервал попадает четыре корня: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{2}$.

Ответ.: 4 .

5. Решите уравнение $2x^2 - 5x + 6 = 0$ и найдите сумму действительных частей корней этого уравнения.

В опросный лист запишите число, равное сумме корней уравнения.

Решение.

Используя общую формулу для нахождения корней квадратного уравнения, получим:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{25-48}}{4} = \frac{5}{4} \pm i\frac{\sqrt{23}}{4}$$

. $Re\, x_1 = Re\, x_2 = \frac{5}{4}$, тогда

$$Re\, x_1 + Re\, x_2 = \frac{10}{4}$$

.

Ответ: 2,5 .

6. Решить неравенство $\frac{x-9}{x+6} \geq 2$. Найдите количество целых отрицательных решений неравенства.

Полученное число запишите в опросный лист.

Решение. Решаем дробно-рациональное неравенство методом интервалов.

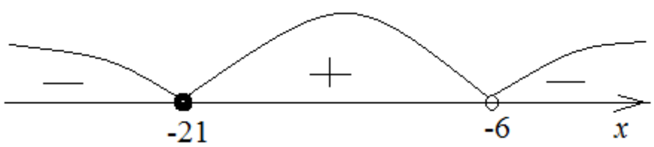
1) ОДЗ: (-∞;-6); (-6;+∞)

2) Преобразуем неравенство:

$$\frac{x-9}{x+6} - 2 \geq 0; \quad \frac{x-9-2x-12}{x+6} \geq 0; \quad \frac{-x-21}{x+6} \geq 0$$

3) Нули левой части: $x = -21$

4) Промежутки знакопостоянства:



5) Решение: [-21; -6)

Количество целых отрицательных чисел в полученном множестве равно 15.

Ответ: 15.

7. Решите неравенство $4^{3x-1} \geq 64$.

В ответе запишите наименьшее простое число, удовлетворяющее неравенству.

Полученное число запишите в опросный лист.

Решение.

$$4^{3x-1} \geq 4^3 \;\rightarrow\; 3x-1 \geq 3 \;\rightarrow\; x \geq \frac{4}{3}$$

Наименьшее простое решение неравенства равно 2 .
Ответ: 2 .

8. Решите неравенство $\log_{0,2}x \geq -2.$
Определите, сколько целых чисел содержится в множестве решений неравенства.
Ответ в виде числа запишите в опросный лист.

Решение.
1) Ограничения: $x > 0$.
2) Решение:

$$\log_{0,2}x \geq -2 \;\rightarrow\; \log_{0,2}x \geq \log_{0,2}0{,}2^{-2} \;\rightarrow\; x \leq 25$$

3) С учетом ограничения $0 < x \leq 25.$ В этом интервале 25 целых чисел (от 1 до 25).
Ответ: 25.

9. Решите неравенство $\left|2x+5\right| \leq 9.$
Найдите среднее арифметическое целых решений неравенства.
Ответ в виде числа запишите в опросный лист.

Решение.

$$\left|2x+5\right| \leq 9 \;\rightarrow\; -9 \leq 2x+5 \leq 9 \;\rightarrow -14 \leq 2x \leq 4 \;\rightarrow -7 \leq x \leq 2$$

Целые решения: -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2. Их среднее арифметическое:

$$\frac{-7-6-5-4-3-2-1+0+1+2}{10} = -2{,}5$$

Ответ: -2,5.

10. Найдите, количество целых чисел в области определения функции

$$f\left(x\right) = \log_2 x - \sqrt{9-x}$$.

В качестве ответа в опросный лист запишите число, равное количеству целых чисел, содержащихся в интервалах, в которых функция определена.

Решение.
Область определения функции – это множество значений аргумента, для которых функция определена (существует). В данном случае областью определения функции будут интервалы,

являющиеся решением системы неравенств: $\begin{cases} x > 0 \\ 9-x \geq 0 \end{cases}$, то есть $x \in \left(0;9\right]$.
В этом интервале содержится 9 целых чисел.
Ответ: 9.

11. Функция $f\left(x\right)$ задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения аргумента. Определите количество точек разрыва у этой функции.

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x}, & если \quad x \le -1 \\ x+3, & \quad -1 < \quad \le 1 \\ 6, & если \quad x > 1 \end{cases}$$
.

В опросный лист запишите в виде числа количество точек разрыва для данной функции.

Решение.
Так как внутри каждого из трех интервалов функция непрерывна, то точки разрыва нужно искать на границах интервалов.

1) Так как левосторонний предел равен $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=f(-1)=1$, а правосторонний равен $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1+0}(\quad+3)=2$ и они не равны , то точка $x=-1$ является точкой разрыва.

2) Так как левосторонний предел равен $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to1-0}(\quad+3)=4$, правосторонний равен $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=6$, и они не равны , то точка $x=1$ также является точкой разрыва.
То есть, у данной функции есть две точки разрыва.
Ответ: 2 .

12. Любой член a_n числовой последовательности можно определить по формуле $a_n=\dfrac{(5-n)^3}{n+2}$. Вычислите восьмой член последовательности.
В опросный лист запишите полученное числовое значение.

Решение.
Подставляя в формулу $n=8$, получим

$$a_8=\frac{(5-8)^3}{8+2}=\frac{(-3)^3}{10}=-\,2{,}7\,.$$

Ответ: -2,7.

13. Найдите значение предела $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$.
Запишите полученное число в опросный лист.

Решение.

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-8x+15}{x^2-25}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x-3)}{(x-5)(x+5)}=\lim_{x\to5}\frac{(x-3)}{(x+5)}=\frac{2}{10}=0{,}2$$
.

Ответ: 0,2 .

14. Найдите значение предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 3x}{x^3}$.
Запишите полученное число в опросный лист.

Решение.

Воспользуемся 1-ым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 3x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 3x}{x^3}=\lim_{x\to 0}3^3\cdot\frac{\sin^3 3x}{3^3\cdot x^3}=27\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^3=27\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\right)^3=27\cdot 1=27$$.

Ответ: 27 .

15. Вычислите значение производной $f'(x)$ при заданном значении аргумента $x=1$ для функции $f(x)=\frac{(x^2+1)}{(x^3+1)}$.
Полученное числовое значение запишите в опросный лист.

Решение.
Воспользовавшись правилами дифференцирования, получим:

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)'(x^3+1)-(x^2+1)(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{2x(x^3+1)-3x^2(x^2+1)}{(x^3+1)^2}$$.

Тогда $f'(1)=\frac{2\cdot 1(1^3+1)-3\cdot 1^2(1^2+1)}{(1^3+1)^2}=\frac{2\cdot 1\cdot 1-3\cdot 1\cdot 2}{4}=-\frac{1}{2}=-0,5$.

Ответ: – 0,5 .

16. Найдите сумму координат точки на графике функции $y=3x^2-2x+4$, обладающую тем свойством, что угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в этой точке, равен 10.
Числовое значение углового коэффициента запишите в опросный лист.

Решение.
Так как угловой коэффициент k есть тангенс угла наклона касательной, то
$k=tg\alpha=y'(x_0)$.

Для нашего случая:

$$y'=6x-2,\quad k=y'(x_0)=6x_0-2=10,\quad x_0=2,$$

$$y(2)=3\cdot 2^2-2\cdot 2+4=12.$$

Сумма координат искомой точки 2+12=14.
Ответ: 14 .

17. Точка движется по координатной оси согласно закону $S(t) = \dfrac{t^3}{3} - t^2 + t - 1$ где $S(t)$ – координата точки в момент времени t (время измеряется в секундах, расстояние – в метрах). Найти скорость точки через пять секунд после начала движения, совпадающего с началом отсчета времени.
Ответ в виде числа запишите в опросный лист.

Решение.
Мгновенная скорость есть первая производная от перемещения, поэтому

$$v(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 - t^2 + t - 1\right)' = t^2 - 2t + 1.$$

Тогда, при $t = 5$ получим: $v(5) = 5^2 - 2 \cdot 5 + 1 = 25 - 10 + 1 = 16.$

Ответ: 16 .

18. Найдите абсциссу точки экстремума функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$. Если у функции несколько точек экстремума, в ответе запишите наименьшее из всех значений абсцисс точек экстремума.
Ответ в виде числа запишите в опросный лист.

Решение.
Абсциссой точки экстремума функции называется такое значение аргумента, при котором производная функции равна нулю и меняет свой знак при переходе через это значение аргумента.
Проверим выполнение этих условий для данной функции.

$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)' = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Получили, что $y' = 0$ при $x = -2$ и $x = 2$.
При переходе через каждое из этих двух значений производная функции меняет свой знак. Следовательно, обе эти точки являются точками экстремума. В ответе указываем наименьшее значение. Это -2 .
Ответ: -2 .

19. Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 8 \quad + 4$ на отрезке $x \in [-2; 2]$.
Ответ в виде числа запишите в опросный лист.

Решение.
Наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке находится по следующему алгоритму:
1) Ищутся критические точки функции, то есть те значения аргумента, при которых производная функции обращается в нуль и для дальнейшего рассмотрения оставляются только те точки, которые попадают в заданный отрезок. Остальные критические точки отбрасываются.

2) Вычисляются значения функции в оставленных критических точках и на границах отрезка.
Самое большое значение функции среди полученных будет наибольшим значением функции на данном отрезке, самое маленькое – наименьшим .
Найдем наибольшее значение данной функции на данном отрезке.

1) $y' = \left(x^2 - 8\ \ + 4\right)' = 2\ \ - 8 = 2(\ \ - 4)$. $y' = 0$ при $x = 4$.

2) $y(-2) = (-2)^2 - 8(-2) + 4 = 24$, $y(2) = 2^2 - 8 \cdot 2 + 4 = -8$.

Следовательно $y_{наим.} = y(2) = -8$.

Ответ: – 8.

20. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:
$y = x^2 - 8x + 16$ и $y = 6 - x$.

Ответ в опросный лист запишите в виде десятичной дроби .

Решение

Если на интервале $x \in [a;b]$ фигура ограничена участками графиков функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, причем $y_1(x) > y_2(x)$, то площадь ее можно найти по формуле

$$S = \int_a^b \left(\ _1(\ ) - \ _2(\ )\right)$$.

Найдем пределы интегрирования. Решим систему:

$$\begin{cases} y = x^2 - 8x + 16 \\ y = 6 - x \end{cases} \rightarrow x^2 - 8x + 16 = 6 - x \rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \rightarrow x = 2 = a,\ x = 5 = b$$.

На интервале $x \in [2;5]$ $6 - x > x^2 - 8x + 16$.

Поэтому
$$S = \int_2^5 \left((6 - \ \ ) - \left(x^2 - 8\ \ + 16\right)\right) = \int_2^5 \left(7\ \ - \ ^2 - 10\right) = \left(7 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 10\ \ \right)\Bigg|_2^5 =$$

$$= \left(7 \cdot \frac{5^2}{2} - \frac{5^3}{3} - 10 \cdot 5\right) - \left(7 \cdot \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} - 10 \cdot 2\right) = \left(5^2 \cdot \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{3}\right) - 10 \cdot 5\right) - \left(2^2 \cdot \left(\frac{7}{2} - \frac{2}{3}\right) - 10 \cdot 2\right) =$$

$$= \left(5^2 \cdot \frac{11}{6} - 10 \cdot 5\right) - \left(2^2 \cdot \frac{17}{6} - 10 \cdot 2\right) = 5^2 \cdot \frac{11}{6} - 2^2 \cdot \frac{17}{6} - 30 = \frac{275 - 68}{6} - 30 = 34{,}5 - 30 = 4{,}5$$.

Ответ: 4,5 .